

Modèle de particules pour l'estimation de mouvements fluides.

Anne Cuzol, Etienne Mémin
IRISA, Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu,
35 042 Rennes Cedex, France
{acuzol,memin}@irisa.fr

Résumé

Nous proposons dans cet article un nouvel estimateur de mouvements adapté aux séquences d'images décrivant des mouvements fluides. L'estimateur proposé est basé sur la décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs. Cette décomposition consiste à représenter le champ de déplacements comme somme d'une composante à divergence nulle et d'une composante à vorticité nulle. L'objectif principal est de fournir une représentation paramétrique de faible dimension du flot optique en le décrivant par un nombre réduit de particules de vortex et de source. Les deux composantes sont approchées en utilisant une discrétisation de la vorticité et de la divergence à l'aide de mesures de Dirac régularisées. Les composantes du champs nommées solénoïdale et irrotationnelle consistent alors en une combinaison linéaire de fonctions de base obtenues par convolution entre le gradient du noyau de Green et la vorticité ou la divergence. Les valeurs des coefficients et les paramètres associés aux fonctions de base sont estimés par minimisation d'une fonctionnelle basée sur une version intégrée du principe de conservation de la masse de la mécanique des fluides. Les résultats sont présentés sur des séquences réelles.

Mots Clef

Mouvement fluide, flot optique, modèle paramétrique.

Abstract

In this paper we propose a new motion estimator for image sequences depicting fluid flows. The proposed estimator is based on the Helmholtz decomposition of vector fields. This decomposition consists in representing the velocity field as a sum of a divergence free component and a curl free component. The objective is to provide a low-dimensional parametric representation of optical flows by depicting them as a flow generated by a small number of vortex and source particles. Both components are approximated using a discretization of the vorticity and divergence maps through regularized Dirac measures. The resulting so called irrotational and solenoidal fields consist then in linear combinations of basis functions obtained through a convolution product of the Green kernel gradient and the vorticity map or the divergence map respectively. The coefficient values

and the basis function parameters are obtained by minimization of a functional relying on an integrated version of mass conservation principle of fluid mechanics. Results are provided on real world sequences.

Key Words

Fluid motion, optical flow, parametric model.

1 Introduction

L'observation, la compréhension et le contrôle de mouvements fluides sont des problèmes scientifiques majeurs intervenant dans divers domaines des sciences environnementales tels que l'océanographie, la météorologie ou la climatologie. La complexité des phénomènes étudiés et le manque d'information sur les conditions au bord empêchent d'avoir une compréhension physique complète du phénomène. Il est difficile d'obtenir des mesures précises et denses à partir des modèles physiques courants. Les données image fournies par les capteurs sont très attractives car elles fournissent des données multimodales à haute résolution spatio-temporelle. L'analyse des structures dynamiques et l'estimation de vitesses dans des séquences d'images de fluides a vivement intéressé la communauté de vision par ordinateur depuis quelques années [6, 7, 10, 12, 15, 16]. Ces travaux concernent des domaines d'application différents tels que la mécanique des fluides expérimentales, les sciences environnementales (océanographie, météorologie, ...), ou l'imagerie médicale. Des approches dédiées à l'estimation de mouvements fluides ont été récemment proposées [4, 9]. Contrairement à la plupart des méthodes d'estimation de mouvement basées sur l'hypothèse de conservation de la luminance et une fonction de lissage au premier ordre, ces techniques reposent sur un modèle de données dérivé de l'équation de continuité de la mécanique des fluides, accompagnée d'une régularisation *div-curl* du deuxième ordre. Une régularisation du premier ordre (  ventuellement associée à une fonction de coût robuste) favorise les champs de mouvements translationnels en pénalisant les gradients élevés de la solution. La pénalisation *div-curl* du second ordre va encourager les solutions avec des zones constantes de divergence ou vorticité.

Ces méthodes sont plus satisfaisantes puisqu'elles s'accordent avec les variations de luminance et les mouve-

ments observés dans les séquences d'images de fluides. Néanmoins, ces méthodes doivent faire face à une grande complexité numérique. Ces estimateurs denses correspondent en effet à des solutions dans des espaces de très grande dimension. Pour certaines applications, il peut être par contre souhaitable de proposer des solutions de faible dimension. C'est le but de cet article.

Nous proposons une technique menant à une description de faible dimension du champ de déplacements issu d'une séquence d'images décrivant un mouvement fluide. Cette méthode repose sur la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs, qui consiste à séparer le champ en une composante à divergence nulle et une composante à rotationnel nul. La méthode que nous décrivons est basée sur une approximation discrète de la vorticité et de la divergence du champ. Cette discrétisation permet de fournir implicitement des régularisations adaptées au problème d'estimation de mouvement fluide.

2 Définitions et propriétés sur les champs de vecteurs

Nous présentons dans cette partie des résultats connus sur les champs de vecteurs, que nous utiliserons ensuite pour développer une méthode originale d'estimation de mouvement fluide.

Un champ de vecteurs bidimensionnel \mathbf{w} est une application définie sur un ensemble borné Ω de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Nous le notons $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$, où $\mathbf{x} = (x, y)$ et x et y sont les coordonnées spatiales. Chaque composante du champ de vecteurs est supposée deux fois continument différentiable : $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Soit $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ l'opérateur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x et y .

La *divergence* est définie par : $\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}$

et la *vorticité* scalaire du champ de vecteurs par : $\text{curl } \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}^\perp$, où $\mathbf{w}^\perp = (-v, u)$ est l'orthogonal de \mathbf{w} .

La vorticité rend compte de la présence d'un mouvement tourbillonnaire, alors que la divergence est reliée à la présence de *puits* ou *sources*. Un champ de vecteur à divergence nulle en tout point est dit *solénoïdal*. De manière similaire, un champ de vorticité nulle sera dit *irrotationnel*. Un résultat connu stipule que tout champ irrotationnel est associé à une fonction scalaire ϕ , appelée *potentiel de vitesse*, telle que $\mathbf{w} = \nabla \phi$. De la même manière on peut montrer qu'il existe une fonction scalaire ψ appelée *fonction de courant* telle que $\mathbf{w}^\perp = \nabla \psi$.

Tout champ de vecteurs s'annulant à l'infini peut être décomposé en somme d'une composante irrotationnelle   vorticité nulle et d'une composante solénoïdale à divergence nulle. Cette décomposition est connue sous le nom de *décomposition de Helmholtz*. Quand la condition de nullité au bord n'est pas vérifiée, une nouvelle composante appelée *laminaire* doit être ajoutée à la décomposition. La

décomposition s'écrit alors : $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{irr} + \mathbf{w}_{sol} + \mathbf{w}_{lam}$. Cette dernière composante peut être approchée à l'aide de l'estimateur de Horn et Schunck en fixant un fort coefficient de régularisation [5]. Nous considérons à partir de maintenant que le mouvement d  à la composante laminaire a été préalablement retranché de la séquence d'images. Nous supposons donc une condition de bord nulle à l'infini en sachant que la séquence d'images $I(\mathbf{x}, t)$ est reliée à la séquence originale $I_o(\mathbf{x}, t)$ par $I(\mathbf{x}, t) = I_o(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{lam}(\mathbf{x}, t), t)$.

En remplaçant les deux composantes \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} par leurs expressions en termes de fonctions de potentiel et en calculant la divergence et la vorticité des champs nous pouvons écrire les fonctions de potentiel comme solutions de deux équations de Poisson :

$$\Delta \phi = \text{div } \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \Delta \psi = -\text{curl } \mathbf{w}, \quad (1)$$

avec Δ opérateur Laplacien. Ces solutions peuvent être écrites comme des produits de convolution de la manière suivante :

$$\phi = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \text{div } \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = G \otimes \text{div } \mathbf{w}, \quad (2)$$

$$\psi = - \int G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = -G \otimes \text{curl } \mathbf{w}, \quad (3)$$

avec G fonction de Green associée au Laplacien bidimensionnel :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x}|). \quad (4)$$

Les champs de vecteurs \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} s'écrivant respectivement comme le gradient et le gradient orthogonal des fonctions de potentiel ϕ et ψ , l'équation (2-3) devient :

$$\mathbf{w}_{irr} = K \otimes \text{div } \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{sol} = -K^\perp \otimes \text{curl } \mathbf{w}, \quad (5)$$

avec K gradient du noyau de Green :

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi|\mathbf{x}|^2}. \quad (6)$$

La deuxième équation de (5) est connue sous le nom d'*intégrale de Bio-Savart*. Les deux équations indiquent que les composantes solénoïdale et irrotationnelle du champ (et donc le champ complet) peuvent être reconstruites si la divergence et la vorticité du champ de déplacements sont connues.

3 Particules de vortex

L'idée des méthodes de particules de vortex [2, 11] consiste à approcher la vorticité d'un champ \mathbf{w} par une somme discrète de Diracs situées en des *vortex ponctuels* \mathbf{z}_i :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i). \quad (7)$$

Cette discrétisation de la vorticité en un nombre limité d'éléments permet d'évaluer le champ de déplacements directement à partir de l'intégrale de Bio-Savart (equ. 5). Des

singularités apparaissent cependant dans l'évaluation du champ, lorsque deux particules sont trop proches l'une de l'autre, à cause de la singularité dans le gradient du noyau de Green. Ces singularités peuvent être éliminées en lissant la mesure de Dirac par une fonction *blob*, conduisant finalement à une version lissée de K . Soit f_ϵ une telle fonction blob mise à l'échelle par un paramètre ϵ : $f_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2} f(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon})$. Le noyau lissé est alors défini par $K_\epsilon = K \otimes f_\epsilon$. Le degré de lissage est déterminé par la valeur de ϵ . Si $\epsilon \rightarrow 0$, f_ϵ tend vers la fonction Dirac et $K_\epsilon \rightarrow K$.

Une représentation analogue peut être écrite pour la divergence du champ, à partir de *particules de source* :

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i f_{\epsilon_i}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i), \quad (8)$$

où \mathbf{z}_i indique le centre de chaque fonction de base f_{ϵ_i} , le coefficient réel γ_i représente la force associée à la particule i , et ϵ_i son domaine d'influence. Nous considérons que tous ces paramètres sont libres de varier d'une fonction à l'autre.

4 Estimation de mouvement fluide à partir d'une séquence d'images

Nous présentons dans cette partie comment les représentations à partir des particules de vortex et de source peuvent être combinées à une fonction de coût appropriée pour en déduire un estimateur de mouvement dédié aux images décrivant des mouvements fluides.

4.1 Représentation du mouvement

Comme nous l'avons vu précédemment, la discrétisation de la vorticité à l'aide de p particules de vortex conduit, grâce à l'intégrale de Bio-Savart, à la représentation suivante pour la composante solénoïdale du champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} K^\perp \otimes f_{\epsilon_i^{sol}}(\mathbf{z}_i^{sol} - \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp(\mathbf{z}_i^{sol} - \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9)$$

où $K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp$ est le noyau obtenu en convoluant le gradient orthogonal du noyau de Green avec la fonction de lissage. Une représentation similaire pour la composante irrotationnelle peut être obtenue à l'aide des q particules de source. En conclusion, nous obtenons une approximation du champ de déplacements par une somme pondérée de fonctions de base définies par la position de leur centre et leur domaine d'influence. Avec une fonction de lissage gaussienne nous obtenons une forme analytique pour le noyau lissé associé, de laquelle nous pouvons en déduire les expressions finales pour les deux composantes :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} \frac{(\mathbf{z}_i^{sol} - \mathbf{x})^\perp}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{sol}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{sol}|^2}{\epsilon_i^{sol2}}}\right), \quad (10)$$

et

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^q \gamma_i^{irr} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}|^2}{\epsilon_i^{irr2}}}\right). \quad (11)$$

Cette représentation paramétrique va être liée à un modèle de variation spatio-temporel de la luminance, de manière à estimer le mouvement fluide à partir des données de la séquence d'images.

4.2 Modèle de variation de luminance basé sur une équation de continuité intégrée

Pour des séquences d'images décrivant des phénomènes fluides, l'hypothèse usuelle de conservation de luminance ($\frac{dI}{dt} = 0$) ne permet pas de modéliser des changements temporels de luminance dus au déplacement tridimensionnel de matière. Pour de telles séquences, certains travaux ont montré qu'un modèle de données construit à partir de la propriété de conservation de la matière de la mécanique des fluides (  galement connu sous le nom d'*  quation de continuité*) constitue un meilleur modèle [1, 4, 13, 15]. Ce modèle de données s'écrit :

$$\frac{dI}{dt} + I \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (12)$$

Une telle contrainte décrit l'effet d'un mouvement divergent sur les changements de luminance. Il est ainsi possible de modéliser l'apparition ou disparition de matière caus  e par des mouvements 3D qui ne sont pas dans le plan image. Notons que pour un champ à divergence nulle, nous retrouvons l'équation usuelle de conservation de la luminance. Pour des déplacements de grande amplitude (mouvements rapides ou intervalle de temps long entre deux images comme en météorologie) une forme intégrée de cette contrainte peut être utilisée [4] :

$$I(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (13)$$

Cette contrainte stipule que l'image au temps $t + 1$ est liée à l'image au temps t par un facteur d'echelle qui dépend du mouvement divergent. Avec une divergence nulle nous retrouvons la contrainte classique de différence d'images déplacées.

Nous cherchons finalement un champ de déplacements qui minimise la fonction de coût suivante, considérant que la contrainte est valide presque partout dans le plan image :

$$\mathcal{F}(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [I(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I(\mathbf{x}, t)]^2 d\mathbf{x}. \quad (14)$$

4.3 Problème général de minimisation

A partir de cette fonction de coût, le champ inconnu approché par les représentations de particules de vortex et de

source est obtenu en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \mathcal{F}(I, \mathbf{w}(\beta)), \quad (15)$$

avec $\beta = (\{\mathbf{z}_i^{sol}, \gamma_i^{sol}, \epsilon_i^{sol}\}_{i=1:p}, \{\mathbf{z}_i^{irr}, \gamma_i^{irr}, \epsilon_i^{irr}\}_{i=1:q})$. La solution est recherchée en termes de positions des particules, coefficients de force et domaines d'influence. La forme particulière du modèle de données conduit malheureusement à un problème de minimisation hautement non linéaire. Pour résoudre ce problème d'optimisation nous avons choisi un schéma de type moindres carrés non linéaires incorporé dans un cadre multirésolution, associé à une méthode d'optimisation de type gradient conjugué généralisé, connue sous le nom de méthode de *Fletcher-Reeves*.

Nous présentons dans la partie qui suit comment ce problème difficile d'optimisation est traité.

5 Estimation

Nous considérons un cadre de minimisation incrémental pour contourner la non linéarité de la fonction de différence pondérée d'images déplacées (13). Ce schéma consiste à appliquer des linéarisations successives autour d'un estimé précédent. Ces techniques, dans le même esprit que les méthodes de moindres carrés non linéaires de Gauss-Newton, sont souvent associées à un cadre multirésolution. Nous utiliserons également cette représentation des données.

5.1 Schéma d'estimation incrémental

Nous supposons qu'une estimation précédente de l'ensemble des paramètres est connue. Tous ces paramètres introduits dans notre modèle conduisent à un champ de déplacements $\tilde{\mathbf{w}}$. Nous considérons une linéarisation autour de $(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}, t + 1)$. En supprimant les indices temporels pour plus de lisibilité nous aboutissons à la fonctionnelle suivante, à minimiser selon \mathbf{h} , champ incrémental correctif inconnu.

$$\mathcal{F}(\mathbf{h}) = \int_{\Omega} [\exp(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})) \{(\tilde{I}(\mathbf{x}) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \nabla \tilde{I}(\mathbf{x}))^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \tilde{I}(\mathbf{x})\} - I(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}.$$

Notons que nous avons introduit dans cette équation une notation compacte $\tilde{I}(\mathbf{x})$ pour l'image recalée $I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}, t + 1)$. Le champ correctif \mathbf{h} est la somme d'une composante solénoïdale \mathbf{h}_{sol} et d'une composante irrotationnelle \mathbf{h}_{irr} , comme le décrit la décomposition de Helmholtz. Comme le champ $\tilde{\mathbf{w}}$, ce champ incrémental est paramétrisé à partir d'un ensemble de particules de vortex et de source.

En pratique, ce type de schéma est traité en représentant les données sur une pyramide multirésolution. Une telle représentation des données est obtenue par filtrage passe-bas et sous-échantillonnage. A un niveau donné de la pyramide, le mouvement estimé $\tilde{\mathbf{w}}$ est la projection du champ

obtenu au niveau précédent. Au niveau le plus haut ce champ est nul.

5.2 Problème de minimisation associé

Le schéma d'estimation incrémental transforme le problème d'optimisation non linéaire (15) en une succession de problèmes plus simples par rapport à certaines des inconnues. Ainsi, les dérivées partielles de la fonctionnelle par rapport aux différentes variables sont données par :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial \gamma_i} = \int_{\Omega} \frac{r_i(\mathbf{x})}{\pi |r_i(\mathbf{x})|^2} (1 - e^{-\frac{|r_i(\mathbf{x})|^2}{\epsilon_i^2}}) y(\mathbf{x}) [y(\mathbf{x})^T \mathbf{h}(\mathbf{x}, \gamma_i) + z(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_i = \frac{1}{\epsilon_i}} = \int_{\Omega} \frac{2\gamma_i r_i(\mathbf{x})}{\pi \epsilon_i |r_i(\mathbf{x})|^2} e^{-\frac{|r_i(\mathbf{x})|^2}{\epsilon_i^2}} y(\mathbf{x}) [y(\mathbf{x})^T \mathbf{h}(\mathbf{x}, \epsilon_i) + z(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (17)$$

$$\nabla_{\mathbf{z}_i} \mathcal{F}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial y_i} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

où :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial x_i} = \int_{\Omega} -\frac{\frac{2}{\epsilon_i^2} |r_i(\mathbf{x})|^2 r_i^2(x) + (|r_i(\mathbf{x})|^2 + r_i^2(x))(1 - e^{-\frac{|r_i(\mathbf{x})|^2}{\epsilon_i^2}})}{\pi |r_i(\mathbf{x})|^4} y(\mathbf{x}) [y(\mathbf{x})^T \mathbf{h}(\mathbf{x}, x_i) + z(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (19)$$

et :

$$\begin{cases} \beta_i = \frac{1}{\epsilon_i}, \\ r_i(\mathbf{x}) = (r_i(x), r_i(y))^T = \mathbf{x} - \mathbf{z}_i (\text{partie irr.}) \\ \text{ou } (\mathbf{z}_i - \mathbf{x})^\perp (\text{partie sol.}), \\ y(\mathbf{x}) = e^{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})} (\tilde{I}_{t+1}(\mathbf{x}) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \nabla \tilde{I}_{t+1}(\mathbf{x})), \\ z(\mathbf{x}) = e^{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})} \tilde{I}_{t+1}(\mathbf{x}) - I_t(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (20)$$

Les équations (16), (17) et (18) conduisent à trois problèmes différents. Le premier, lié aux coefficients de forces γ_i est linéaire, le second lié aux domaines d'influence ϵ_i est non linéaire. Aucune minimisation sous contrainte n'est nécessaire dans les deux cas. Un processus de descente de gradient peut être utilisé pour ces inconnues. Pour le troisième problème, une contrainte supplémentaire devrait être imposée pour forcer les centres \mathbf{z}_i des particules à rester dans le domaine image. Un tel problème de minimisation sous contrainte associé à ce type de non linéarité conduit à une minimisation très complexe. De plus, si nous supposons que dans certains cas nous n'avons

aucune idée sur la position initiale des particules, nous devons trouver une méthode permettant des éventuels grands déplacements des positions des centres.

Nous avons donc découpé le problème selon le type des inconnues. Les coefficients de force et les domaines d'influence seront estimés par une méthode de type gradient conjugué, pour des positions fixes des particules. Les positions seront modifiées à leur tour grâce à un schéma *mean shift* décrit par la suite.

Les deux premiers problèmes (associés aux coefficients de force et aux domaines d'influence des particules) seront résolus par un schéma de type gradient conjugué généralisé, alors que le troisième ensemble d'inconnues (la position des centres) est fixé. Les positions des particules seront modifiées à leur tour grâce à un schéma *mean shift* décrit par la suite.

5.3 Optimisation par Fletcher-Reeves

Le schéma de minimisation de Fletcher-Reeves consiste en une extension non quadratique de l'algorithme de gradient conjugué classique. A partir d'un estimé $\Theta_k = \{\gamma_k^{sol}, \epsilon_k^{sol}, \gamma_k^{irr}, \epsilon_k^{irr}\}$ et d'une direction \mathbf{d}_k , une minimisation linéaire (par rapport à α_k) est réalisée le long de \mathbf{d}_k pour mener à $\Theta_{k+1} = \Theta_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$. La variante de Fletcher-Reeves du gradient conjugué génère \mathbf{d}_{k+1} à partir de :

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\nabla \mathcal{F}(\Theta_{k+1}) + \beta_k \mathbf{d}_k$$

avec :

$$\beta_k = \left(\frac{\|\nabla \mathcal{F}(\Theta_{k+1})\|_2}{\|\nabla \mathcal{F}(\Theta_k)\|_2} \right)^2.$$

Notons que pour la partie linéaire de notre système nous retombons sur le gradient conjugué classique. Pour commencer le processus d'optimisation nous considérons, comme dit précédemment, que les positions des particules sont fixées. Nous initialisons les domaines d'influence de manière adaptative pour recouvrir le domaine de l'image. A convergence, nous obtenons une représentation du champ incrémental pour des positions fixées des particules de vortex et de source. Nous proposons dans la partie qui suit une méthode pour ajuster ces positions.

5.4 Ajustement des positions des particules

Les méthode d'estimation que nous avons proposée demande de fixer les positions des particules de vortex et de source (associées respectivement aux composantes solénoïdale et irrotationnelle du champ). Nous présentons une manière de déplacer chaque particule en utilisant l'information apportée par une certaine surface, définie à partir des données des images et de l'estimation précédente. La méthode proposée est basée sur la procédure *mean shift* [8].

Définition de la fonction d'erreur. Nous supposons que des estimations des coefficients de force et des domaines d'influence des deux particules sont connues pour les deux composantes et construisons alors deux surfaces d'erreur. Pour chaque composante, la surface est l'erreur commise

après recalage, en considérant l'autre composante orthogonale fixée. Pour la composante solénoïdale la surface d'erreur est définie en tout point du domaine image par :

$$\mathcal{D}^{sol}(\mathbf{x}) = I_{t+1}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{h}}^{irr}(\mathbf{x})) - I_t(\mathbf{x}), \quad (21)$$

où $\tilde{\mathbf{h}}^{irr}$ est une première estimation de l'incrément irrotationnel, obtenue avec des positions fixées des particules. Cette surface indique toute l'erreur de reconstruction due à la composante solénoïdale. De manière similaire, la surface d'erreur liée à la composante irrotationnelle est définie par :

$$\mathcal{D}^{irr}(\mathbf{x}) = I_{t+1}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{h}}^{sol}(\mathbf{x})) - I_t(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Extension à une surface caractéristique. La qualité de la modélisation que nous considérons dépend de la précision dans l'approximation discrète de la vorticité et la divergence. Pour obtenir la meilleure approximation possible avec un nombre limité de particules, nous essayons de concentrer la majeure partie des particules dans les zones de forte vorticité ou forte divergence. Les surfaces d'erreur définies par (21) ou (22) peuvent aider à guider une particule vers une nouvelle position en accord avec sa nature (vortex ou source). Cependant la particule peut être mal guidée si l'estimation initiale des composantes n'est peu informative, car \mathcal{D}^{sol} pourrait contenir une erreur associée à la composante irrotationnelle, et inversement.

Pour résoudre ce problème nous proposons d'ajouter un terme à chaque surface d'erreur, basé sur la quantité de vorticité ou de divergence estimée. Les particules peuvent être alors encouragées à se diriger vers des positions de forte erreur, associées à une zone avec présence de vorticité ou de divergence. Nous obtenons finalement deux surfaces, pour la partie solénoïdale et la partie irrotationnelle :

$$\mathcal{S}^{sol}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathcal{D}^{sol}(\mathbf{x}))^2}{\int_{\Omega} (\mathcal{D}^{sol}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}} + \frac{(\text{curl} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))^2}{\int_{\Omega} (\text{curl} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}}, \quad (23)$$

et

$$\mathcal{S}^{irr}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathcal{D}^{irr}(\mathbf{x}))^2}{\int_{\Omega} (\mathcal{D}^{irr}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}} + \frac{(\text{div} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))^2}{\int_{\Omega} (\text{div} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}}. \quad (24)$$

Enfin, en vue de restreindre les déplacements des particules dans des zones localisées, nous combinons ces fonctions avec un *a priori* sur la position des particules.

Distribution de probabilité a priori sur la position des particules. Soit \mathbf{z}_i^k le vecteur aléatoire décrivant la position de la particule i à l'étape k . Nous proposons de fixer une distribution sur \mathbf{z}_i^{k+1} connaissant $\mathbf{z}_{1:n}^k$, où $\mathbf{z}_{1:n}^k$

représente l'ensemble des n vecteurs (z_1^k, \dots, z_n^k) à l'étape k . Nous supposons que cette distribution de probabilité est gaussienne, définie par $z_i^{k+1}|z_{1:n}^k \sim \mathcal{N}(z_i^k, \sigma_i^k)$. L'écart-type σ_i^k est égal à la moitié de la distance entre z_i^k et le centre le plus proche parmi $\{z_j^k\}_{j=1, \dots, n, j \neq i}$. La distribution tient donc compte de la position précédente de chaque particule à travers la moyenne z_i^k de l'*a priori* gaussien, mais aussi de la dépendance entre z_i^{k+1} et les autres particules à travers l'expression de σ_i^k .

Version conditionnelle de la distribution de probabilité.

Nous combinons la distribution *a priori* $p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k}$ définie ci-dessus avec la surface décrite plus haut et caractérisée par (23) ou (24). Nous pouvons alors définir une distribution de probabilité conditionnelle pour une particule z_i^{k+1} sachant les autres particules et la surface $S_{z_{1:n}^k}$, liée à la composante solénoïdale ou irrotationnelle, obtenue à partir des positions $z_{1:n}^k$:

$$p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k, S_{z_{1:n}^k}}(\mathbf{x}) \propto S_{z_{1:n}^k}(\mathbf{x}) \cdot p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k}(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Cette distribution partage l'*a priori* sur la position d'une particule donnée (dont le rôle est de forcer la particule à rester dans une certaine zone entre deux itérations) et l'information apportée par la surface caractéristique (associée à toutes les positions des particules) dans le voisinage de cette position. Une fois que cette distribution est connue pour chaque particule nous proposons de déplacer chaque z_i^k vers le mode local de la distribution, dans le but d'ajuster de manière optimale la disposition de l'ensemble des positions.

Déplacement des particules vers les modes locaux de la distribution.

A partir de l'échantillon $\{S_{z_{1:n}^k}(\mathbf{s})\}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}}$ obtenu aux coordonnées de chaque pixel \mathbf{s} et de la distribution de probabilité $p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k}$, une estimation non paramétrique de la distribution de probabilité conditionnelle $p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k, S_{z_{1:n}^k}}$ peut être obtenue [14] par :

$$\hat{p}_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k, S_{z_{1:n}^k}}(\mathbf{x}) \propto \frac{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} S_{z_{1:n}^k}(\mathbf{s}) p_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k}(\mathbf{s}) K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{h}\right)}, \quad (26)$$

avec K noyau de fenêtre h .

Pour déplacer un centre de particule z_i^k vers le mode le plus proche de $\hat{p}_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k, S_{z_{1:n}^k}}$, nous utilisons la méthode d'estimation *mean shift* du gradient d'une fonction de densité [3, 8]. Le vecteur *mean shift* associé s'écrit :

$$M_{h,G}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} w(\mathbf{s}) \mathbf{s} G\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} w(\mathbf{s}) G\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{h}\right)} - \mathbf{x}, \quad (27)$$

où G est le noyau obtenu par dérivation du noyau K . Ce vecteur donne en tout point la direction maximale d'accroissement de la fonction de densité, estimée à travers les poids $w(\mathbf{s})$ et le noyau G . Divers choix peuvent être faits pour ce noyau. Les choix classiques sont le noyau d'Epanechnikov et le noyau gaussien. Notons que le gradient du noyau d'Epanechnikov est un noyau uniforme et que le gradient du noyau gaussien reste un noyau gaussien.

Connaissant l'estimation du gradient de la distribution, un processus itératif convergent [3] apparaît naturellement, nommé *mean shift*. Cette procédure consiste à déplacer itérativement le centre \mathbf{x} du noyau selon $M_{h,G}(\mathbf{x})$ jusqu'à ce qu'un point stationnaire (de gradient nul) de la distribution sous-jacente soit atteint.

Dans notre cas, la procédure *mean shift* est appliquée aux $p + q$ centres des particules intervenant dans notre modélisation du champ de déplacement. Chaque particule est ainsi déplacée vers le mode le plus proche de la distribution conditionnelle $\hat{p}_{z_i^{k+1}|z_{1:n}^k, S_{z_{1:n}^k}}$. Nous choisissons d'utiliser le noyau d'Epanechnikov. Le choix de la taille de la fenêtre correspondante est crucial et nous choisissons des tailles de fenêtre adaptatives, fixées à la distance à la particule la plus proche. Un tel choix est sensé dans notre cas : en effet, seule une approximation lisse de la distribution est nécessaire pour les particules distantes, alors qu'une estimation précise est souhaitable pour approcher au mieux la vorticité et la divergence lorsque les particules sont proches les unes des autres.

5.5 Schéma d'estimation global

Le schéma d'estimation global consiste en une mise à jour alternée des différentes inconnues du modèle. Il est composé des deux étapes suivantes, répétées tour à tour jusqu'à convergence :

1. Pour un ensemble de particules données à positions fixées, les coefficients de force et domaines d'influence liés aux particules sont estimés par l'algorithme de Fletcher-Reeves décrit en section 5.3.
2. Les positions des particules de vortex et de source sont déplacées vers le mode le plus proche de la distribution conditionnelle correspondante. Ce déplacement est réalisé en appliquant la procédure *mean shift* décrite dans la partie 5.4.

Le processus global est stoppé quand la divergence et la vorticité estimés atteignent une certaine stabilité, dont le critère est exprimé par :

$$\left(\frac{\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^{k+1} - \operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^k\|_2}{\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^k\|_2} \right)^2 + \left(\frac{\|\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^{k+1} - \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^k\|_2}{\|\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^k\|_2} \right)^2$$

6 Résultats

Nous présentons dans cette partie des résultats donnés par notre méthode sur des séquences d'images réelles.

Le premier exemple correspond au mouvement de fumée derrière une aile d'avion. Un vortex fort est situé au centre

de l'image, et un deuxième plus faible commence à apparaître à proximité. Les particules sont initialisées sur une grille, sans *a priori*. La méthode d'estimation permet de guider les particules de vortex vers la région d'intérêt de l'image et d'estimer un champ de déplacement précis (cf le champ de vecteurs et la carte de vorticité associée fig. 2). Pour cette séquence nous avons utilisé une pyramide multirésolution à deux niveaux. Au premier niveau les particules se déplacent toutes vers le gros vortex central (fig. 1 (b)). Au niveau inférieur, le nuage de particules se sépare en deux parties (fig. 1 (c)). Un ensemble de particules s'est déplacé vers le vortex le plus faible, permettant de capter son mouvement.

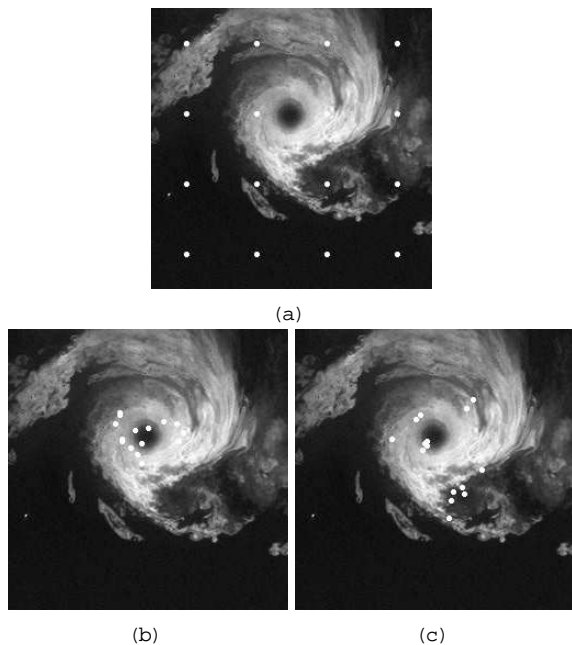


FIG. 1 – Séquence avion. (a) Disposition initiale uniforme des particules ; (b) Position finale des particules au premier niveau de multirésolution ; (c) Position finale des particules au deuxième niveau.

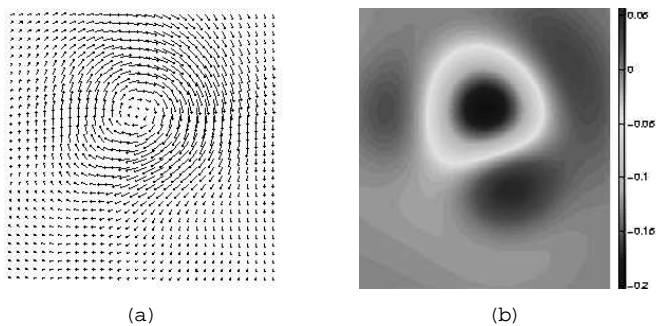


FIG. 2 – Séquence avion. (a) Champ de déplacement estimé ; (b) Vorticité associée.

Le deuxième exemple montre les résultats obtenus sur deux images consécutives du canal infrarouge de Meteosat. La séquence représente une dépression avec un vortex dans la partie gauche du domaine image et présence de cellules convectives au centre. Dans cet exemple, nous cherchons à estimer le mouvement dans des zones spécifiques, nous disposons donc les particules de vortex et de source manuellement dans les régions qui nous intéressent (fig. 3 (a)). Pendant l'estimation, les positions des particules vont s'adapter automatiquement.   convergence les particules de vortex se retrouvent au coeur du vortex, alors que les particules de source sont concentrées sur la cellule convective (fig. 3 (b)).

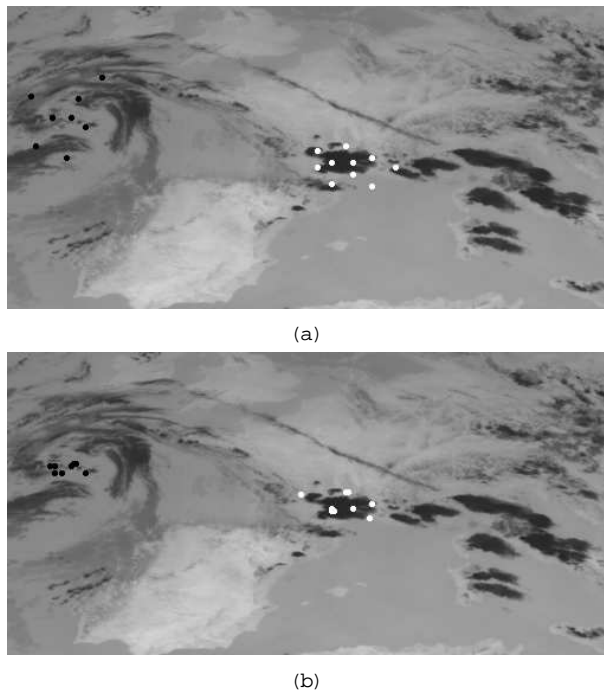


FIG. 3 – Séquence dépression. (a) Disposition manuelle initiale des particules. Les points noirs représentent les particules de vortex, les point blancs les particules de source ; (b) Position finale de ces mêmes particules.

7 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article un estimateur de flot optique dédié aux images décrivant des mouvements fluides. L'estimateur proposé fournit une représentation paramétrique de faible dimension du mouvement. Cette paramétrisation a été obtenue par une certaine discrétisation de la vorticité et de la divergence du champ à partir de fonctions de base adaptées, centrées en des éléments appelés particules. Pour traiter le problème d'estimation associé nous avons proposé une stratégie efficace basée sur une méthode de gradient conjugué généralisé et une procédure mean shift.

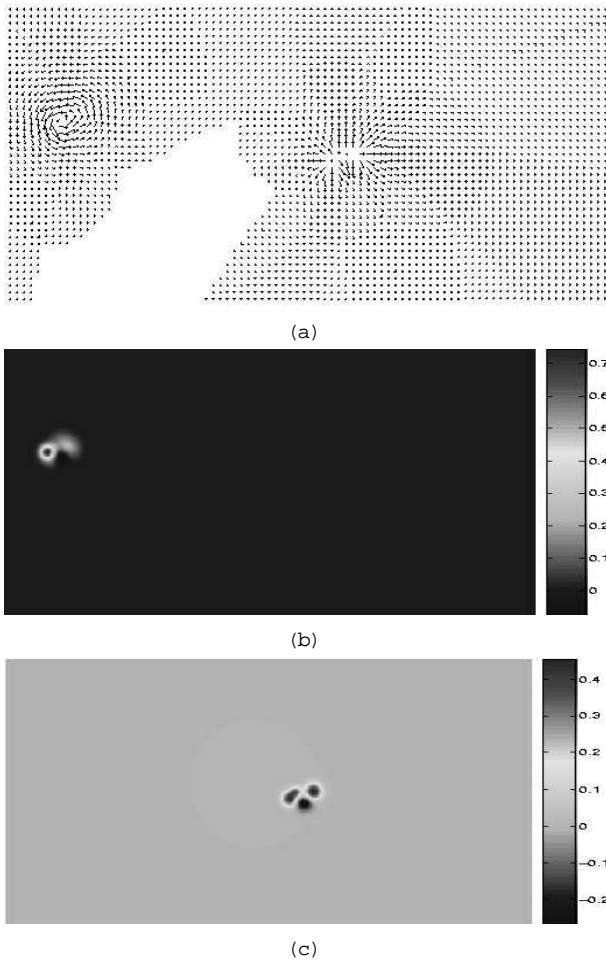


FIG. 4 – Séquence dépression. (a) Champ de déplacement estimé ; (b) Vorticité associée ; (c) Divergence associée.

Références

- [1] D. Béréziat, I. Herlin, and L. Younes. A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, volume 2, pages 487–492, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.
- [2] A. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57 :785–796, 1973.
- [3] D. Comaniciu and P. Meer. Mean shift : A robust approach toward feature space analysis. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 24(5) :603–619, 2002.
- [4] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 24(3) :365–380, 2002.
- [5] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Extraction of singular points from dense motion fields : an analytic approach. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 19(3) :175–198, 2003.
- [6] J.M. Fitzpatrick. A method for calculating velocity in time dependent images based on the continuity equation. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 78–81, San Francisco, USA, 1985.
- [7] R.M. Ford, R. Strickland, and B. Thomas. Image models for 2-d flow visualization and compression. *Graph. Mod. Image Proc.*, 56(1) :75–93, 1994.
- [8] K. Fukunaga and L.D. Hostetler. The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 21(1) :32–40, 1975.
- [9] T. Kohlberger, E. Mémin, and C. Schnörr. Variational dense motion estimation using the Helmholtz decomposition. In *Int. conf. on Scale-Space theories in Computer Vision(Scale-Space '03)*, Isle of Skye, june 2003.
- [10] R. Larsen, K. Conradsen, and B.K. Ersboll. Estimation of dense image flow fields in fluids. *IEEE trans. on Geoscience and Remote sensing*, 36(1) :256–264, Jan. 1998.
- [11] A. Leonard. Vortex methods for flow simulation. *J. Comp. Phys.*, 37, 1980.
- [12] E. Mémin and P. Pérez. Fluid motion recovery by coupling dense and parametric motion fields. In *Int. Conf. on Computer, ICCV'99*, pages 620–625, 1999.
- [13] B.G. Schunk. The motion constraint equation for optical flow. In *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pages 20–22, Montreal, 1984.
- [14] R.A. Thisted. *Elements of statistical computing*. Chapman and Hall, 1988.
- [15] R. Wildes, M. Amabile, A.M. Lanzillotto, and T.S. Leu. Physically based fluid flow recovery from image sequences. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 969–975, 1997.
- [16] L. Zhou, C. Kambhamettu, and D. Goldgof. Fluid structure and motion analysis from multi-spectrum 2D cloud images sequences. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, volume 2, pages 744–751, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.